

О. Н. Петрищев<sup>1</sup>, д.т.н., профессор,  
К. В. Базило<sup>2</sup>, к.т.н., доцент

<sup>1</sup>Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»  
просп. Победы, 37, г. Киев, 03056, Украина

<sup>2</sup>Черкасский государственный технологический университет  
б-р Шевченко, 460, г. Черкассы, 18006, Украина

## ПРИНЦИПЫ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКОВЫХ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТРАНСФОРМАТОРОВ

### Часть 2. Методика расчета параметров и характеристик простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора

В настоящее время отсутствуют надежные и достоверные методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета характеристик и параметров этого класса функциональных элементов современной пьезоэлектроники. В настоящей статье была построена математическая модель простейшего дискового трансформатора. В ходе построения и последующего исследования математической модели были установлены следующие факты:

- пьезоэлектрический дисковый трансформатор является функциональным элементом пьезоэлектроники с отрицательными обратными связями;
- для первичной оценки частот максимальных значений коэффициента трансформации можно использовать результаты расчета частот электромеханических резонансов радиально колеблющегося пьезокерамического диска;
- абсолютные значения коэффициента трансформации существенным образом зависят от значений импеданса электрической нагрузки.

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический трансформатор, осесимметричные колебания, физические процессы, математическая модель.

**Введение.** Простейший дисковый пьезоэлектрический трансформатор (рис. 1) содержит в своем составе первичную электрическую цепь, состоящую из генератора разности электрических потенциалов  $U_1 e^{i\omega t}$  ( $i = \sqrt{-1}$  – мнимая единица;  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время) с внутренним электрическим импедансом  $Z_r$  и дискового электрода (позиция 1 на рис. 1), и вторичную электрическую цепь, состоящую из кольцевого электрода (позиция 2) с подключенной к нему электронной схемой со входным электрическим импедансом  $Z_n$ , на котором формируется разность электрических потенциалов  $U_2 e^{i\omega t}$ . Первичная и вторичная электрические цепи пьезоэлектрического трансформатора не имеют гальванической связи. Энергообмен между ними осуществляется с помощью упругих колебаний поляризованного по толщине пьезокерамического диска (позиция 3 на рис. 1). Очевидно, что работа функционального элемента пьезоэлектроники, который схемати-

чески показан на рис. 1, полностью описывается коэффициентом трансформации  $K(\omega, \Pi) = U_2 / U_1$  (символом  $\Pi$  обозначен набор электрических, геометрических и физико-механических параметров трансформатора), который, в сущности, является математической моделью рассматриваемого устройства. Схема построения математической модели пьезоэлектрического трансформатора в общих чертах изложена в работе [1].

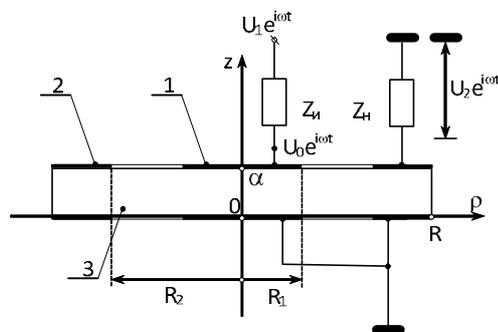


Рис. 1. Расчетная схема простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора

Построению и исследованию математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов посвящено немало публикаций. Начиная с монографии [2], основы расчета передаточных характеристик пьезоэлектрических трансформаторов рассматривались в работах [3–22].

Работы, посвященные расчету параметров и характеристик пьезоэлектрических трансформаторов, можно разделить на две группы. К первой группе относятся работы, которые опираются на полевую (как в работе [1]) модель пьезокерамического диска [3–17].

Однако во многих из них описаны лишь процессы, происходящие в пьезоэлектрическом диске с полностью электродированной поверхностью (сплошными электродами). Так, например, в работе [3] проведено исследование вынужденных колебаний круглой пьезокерамической пластины с учетом вязкоупругости материала на частоте основного резонанса под действием внешней механической гармонической нагрузки для случаев жесткого закрепления контура и шарнирного опирания пластины. В работе [4] исследованы вибрационные характеристики тонкого пьезоэлектрического керамического диска с различным соотношением его размеров. Задача определения спектра собственных частот и форм колебаний рассмотрена в работах [5–7]. В работе [8] выводятся выражения для мгновенной мощности. В работе [9] построена математическая модель резонансных пьезоэлектрических преобразователей при закрепленных и свободных концах. Математическая модель состояния пьезоэлектрика с градиентным полем возбуждения в плоскости кристаллического элемента представлена в работе [10]. В работе [11] определены основные параметры пьезокерамики из измерения максимальной и минимальной проводимостей. В работе [12] исследуются амплитудно-фазовые зависимости для радиальных перемещений, суммы главных напряжений и компонент полной проводимости в окрестности резонансных и антирезонансных частот. Колебания пьезоэлектрических пластин при импульсном нагружении исследованы в работе [13].

Также существует ряд работ, посвященных решению задачи электромеханических колебаний пьезоэлектрических элементов с разделенными электродами (трансформаторный тип). В работах [14] и [15] рассмотрены конструкции пьезоэлектрического трансфор-

матора плоского поперечно-продольного и стержневого типа соответственно. В работе [16] проведен анализ зависимости коэффициента трансформации дискового пьезоэлектрического трансформатора от места расположения вторичного электрода, от ширины вторичного электрода и от значения электрической нагрузки на вторичном электроде. В работе [17] рассмотрены радиальные осесимметричные колебания тонкого пьезокерамического диска с частично электродированной поверхностью. Построена математическая модель процесса регистрации радиальных колебаний поляризованного по толщине пьезокерамического диска.

Рассмотренные выше работы имеют разрозненный характер, на основании чего можно утверждать, что в настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которые могли бы использоваться в качестве теоретических основ расчета их характеристик и параметров, что и является *целью* данной работы.

Ко второй группе относятся работы, основанные на использовании эквивалентных схем [18–22]. Математические модели пьезоэлектрических трансформаторов, построенные на основе анализа так называемых эквивалентных схем, не учитывают того очевидного факта, что движения материальных частиц пьезоэлектрического диска должны удовлетворять второму и третьему законам Ньютона. Игнорирование этого фундаментального положения выводит эти модели за рамки механики деформируемого твердого тела и, как следствие, гарантированно определяет их неадекватность реальным объектам и происходящим в них физическим процессам.

Таким образом, актуальность разработки физически содержательных математических моделей дисковых пьезоэлектрических трансформаторов сохраняется и в настоящее время.

В работе [1] изложены принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на осесимметричных радиальных колебаниях тонких пьезокерамических дисков. Специфические особенности расчета напряженно деформированного состояния пьезокерамического диска, обусловленные наличием двух (в простейшем случае), несущих различный электрический потенциал, электродов, в этой работе не обсуждались. В

настоящей статье, в развитие основных положений работы [1], излагается методика расчета конкретной конструкции (рис. 1) пьезоэлектрического трансформатора. Предваряя изложение этой методики, рассмотрим тестовую задачу об электрическом импедансе радиально колеблющегося тонкого пьезокерамического диска.

### 1. Электрический импеданс радиально колеблющегося тонкого пьезокерамического диска

Предположим, что на электродированные поверхности  $z=0$  и  $z=\alpha$  тонкого ( $\alpha/R \ll 1$ ) пьезокерамического диска (рис. 2) подается гармонически изменяющаяся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  разность электрических потенциалов с амплитудным значением  $U_0$ . Будем считать, что пьезокерамический диск поляризован по толщине. В этом случае матрицы его материальных констант определяются соотношениями (1.1) – (1.3) из работы [1].

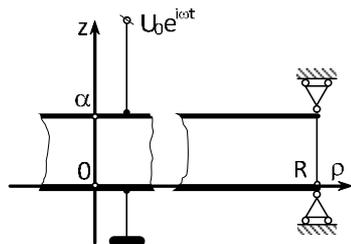


Рис. 2. К расчету электрического импеданса радиально колеблющегося диска

В работе [1] показано, что электрический импеданс  $Z(\omega)$  пьезокерамического диска радиусом  $R$  определяется следующим выражением:

$$Z(\omega) = -\frac{1}{i\omega C^\sigma F_1^{(0)}(\omega, \Pi)}, \quad (1.1)$$

где  $C^\sigma = \pi R^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  - статическая электрическая емкость пьезокерамического диска;  $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon + e_{33}^2 / c_{33}^E$  - диэлектрическая проницаемость в направлении оси  $Oz$ , измеренная в режиме постоянства (равенства нулю) механического напряжения (верхний символ  $\sigma$ );  $\chi_{33}^\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость, измеряемая в режиме равенства нулю механических деформаций (символ  $\varepsilon$ );  $e_{33}$  - пьезомодуль;  $c_{33}^E$  - модуль упругости, измеряемый в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика (символ  $E$ );

$F_1^{(0)}(\omega, \Pi) = e_{31}^* \alpha F_p(R) / (\chi_{33}^\sigma R) - 1$  - частотно зависящая функция;  $e_{31}^* = e_{31} - e_{33} c_{12}^E / c_{33}^E$  - пьезомодуль для режима планарных (радиальных) колебаний тонкого пьезокерамического диска;  $c_{12}^E$  - модуль упругости; функция  $F_p(R) = u_p(R) / U_0$  - чувствительность диска в режиме обратного пьезоэлектрического эффекта;  $u_p(R)$  - значение радиального компонента вектора смещения материальных частиц на границе диска  $\rho = R$ .

В области низких частот, когда длина упругой волны существенно превосходит толщину диска, в нем существуют радиальные колебания материальных частиц, вектор смещения которых практически полностью определяется радиальным компонентом  $u_p(\rho)$ . Радиальное смещение  $u_p(\rho)$  удовлетворяет уравнению установившихся колебаний, которое записывается [23] в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \rho_0 \omega^2 u_p = 0, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_{\rho\rho}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  - механические напряжения сжатия-растяжения, которые в цилиндрической системе координат  $(\rho, \varphi, z)$  рассчитываются по следующим формулам [23]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= c_{11} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12} \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi} + e_{31}^* \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $c_{11} = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{33}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E (1 - c_{12}^E / c_{33}^E)$  - модули упругости для режима радиальных колебаний тонкого пьезокерамического диска;  $\varepsilon_{\rho\rho} = \partial u_p / \partial \rho$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_p / \rho$  - деформации сжатия-растяжения вдоль соответствующих координатных линий цилиндрической системы координат;  $\Phi$  - электрический потенциал в объеме деформируемого пьезокерамического диска.

Производная  $\partial \Phi / \partial z$  в расчетных соотношениях (1.3) определяется следующим образом.

Вектор электрической индукции  $\vec{D}$  в тонком, осесимметрично деформируемом пьезокерамическом диске практически полностью определяется аксиальным компонентом  $D_z$ , который рассчитывается [1] по формуле

$$D_z = e_{31}^* (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Так как в диэлектрике отсутствуют свободные носители электричества, то  $\text{div } \vec{D} = 0$ . Из этого условия следует, что  $\partial D_z / \partial z = 0$ . Учитывая это обстоятельство, проинтегрируем левую и правую части соотношения (1.4) по координате  $z$  в пределах от нуля до  $\alpha$ . Выполнив это действие, получаем

$$\alpha D_z = \alpha e_{31}^* (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma [\Phi(\alpha) - \Phi(0)].$$

Так как  $\Phi(\alpha) - \Phi(0) = U_0$ , то из последнего равенства следует, что

$$D_z = e_{31}^* (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \chi_{33}^\sigma \frac{U_0}{\alpha}. \quad (1.5)$$

Сравнивая правые части двух, физических эквивалентных, определений (1.4) и (1.5) одной и той же величины, находим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{U_0}{\alpha}. \quad (1.6)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= c_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{12} \frac{u_\rho}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= c_{12} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{11} \frac{u_\rho}{\rho} + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Подставляя соотношения (1.7) в уравнение (1.2), получаем уравнение Бесселя следующего вида:

$$x^2 \frac{\partial^2 u_\rho}{\partial x^2} + x \frac{\partial u_\rho}{\partial x} + (x^2 - 1)u_\rho = 0, \quad (1.8)$$

где безразмерная величина  $x = \gamma\rho$ ;  $\gamma = \omega / \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  - волновое число радиальных колебаний тонкого диска.

Решение уравнения (1.8), которое не обращается в бесконечность в точке  $\rho = 0$ , записывается [24] в следующем виде:

$$u_\rho(\rho) = A J_1(\gamma\rho), \quad (1.9)$$

где  $A$  - константа;  $J_1(\gamma\rho)$  - функция Бесселя первого порядка.

В случае шарнирного (рис. 2) или свободного (мягкого) закрепления диска по контуру  $\rho = R$  должно выполняться условие

$$\sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R} = 0. \quad (1.10)$$

Подставляя в условие (1.10) первое соотношение (1.7), определяем значение константы  $A$ :

$$A = - \frac{e_{31}^* R U_0}{\alpha c_{11}} \frac{1}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - k_1) J_1(\Omega)]},$$

где  $\Omega = \gamma R$  - безразмерное волновое число;  $k_1 = c_{12}/c_{11}$  - безразмерный параметр, который в англоязычной литературе часто называют отношением Пуассона.

Таким образом, радиальные смещения материальных частиц тонкого пьезокерамического диска рассчитываются по формуле

$$u_\rho(\rho) = - \frac{e_{31}^* R U_0}{\alpha c_{11}} \frac{J_1(\Omega\rho/R)}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - k_1) J_1(\Omega)]}. \quad (1.11)$$

Подставляя чувствительность  $F_\rho(R) = u_\rho(R)/U_0$  в определение функции  $F_1^{(0)}(\omega, \Pi)$ , получаем выражение для расчета электрического импеданса радиально колеблющегося диска

$$Z(\omega) = \frac{1}{i\omega C^\sigma} \frac{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - k_1) J_1(\Omega)]}{[\Omega J_0(\Omega) - (1 - k_1 - 2K_\rho^2) J_1(\Omega)]}, \quad (1.12)$$

где  $K_\rho^2 = (e_{31}^*)^2 / (\chi_{33}^\sigma c_{11})$  - квадрат коэффициента электромеханической связи для режима радиальных колебаний тонкого пьезокерамического диска.

На рис. 3 показан график модуля электрического импеданса  $Z(\omega)$  диска из пьезоэлектрической керамики типа ЦТС со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 7400 \text{ кг/м}^3; \quad c_{11}^E = 112 \text{ ГПа}; \quad c_{12}^E = 62 \text{ ГПа}; \\ c_{33}^E &= 100 \text{ ГПа}; \quad e_{33} = 20 \text{ Кл/м}^2; \\ e_{31} &= -9 \text{ Кл/м}^2; \quad \chi_{33}^E = 1800 \chi_0; \\ \chi_0 &= 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}. \end{aligned}$$

Добротность пьезокерамики  $Q_m = 80$ . Размеры диска:  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м;  $R = 25 \cdot 10^{-3}$  м. По оси ординат отложены значения модуля электрического импеданса в килоомах, по оси абсцисс отсчитывается безразмерная частота  $\Omega = \gamma R = \omega \tau_0$ , где  $\tau_0 = R/v$  - временной масштаб;  $v = \sqrt{c_{11}/\rho_0}$  - скорость распространения упругих возмущений в тонком диске. Для приведенных выше значений параметров  $v = 3153$  м/с и  $\tau_0 = 7,93 \cdot 10^{-6}$  с. Значению  $\Omega = 1$  соответствует циклическая частота  $f = 20072$  Гц. Расчет электрического импеданса начинался с частоты  $\Omega_0 = 0,025$ .

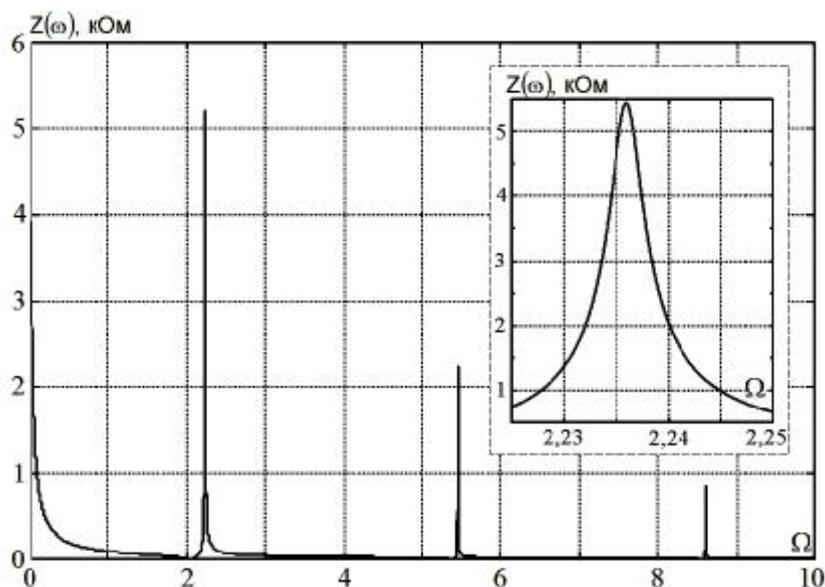


Рис. 3. Модуль электрического импеданса радиально колеблющегося диска

Отчетливо видно, что электрический импеданс диска на некоторых частотах принимает практически нулевые значения. Эти частоты принято называть частотами электромеханического резонанса [23]; их обозначим символом  $\Omega_p$ . При сравнительно небольшом увеличении частоты смены знака напряженно-деформированного состояния сверх значения  $\Omega_p$  наблюдается резкое и весьма значительное увеличение модуля электрического импеданса  $Z(\omega)$  радиально колеблющегося диска. Эти частоты называются частотами электромеханического антирезонанса и обозначаются символом  $\Omega_a$ . Числовые значения частот  $\Omega_p$  и  $\Omega_a$  определяются как ненулевые корни трансцендентных уравнений:

$$\Omega_p J_0(\Omega_p) - (1 - k_1) J_1(\Omega_p) = 0, \quad (1.13)$$

$$\Omega_a J_0(\Omega_a) - (1 - k_1 - 2K_p^2) J_1(\Omega_a) = 0. \quad (1.14)$$

Как следует из уравнений (1.13) и (1.14), числовые значения частот резонансов  $\Omega_p$  зависят от значений параметра  $k_1 = c_{12}/c_{11}$ . Числовые значения частот антирезонансов  $\Omega_a$  определяются двумя параметрами – параметром  $k_1$  и коэффициентом электромеханической связи  $K_p$ . В табл. 1 приведены числовые значения безразмерных частот первых трех электромеханических резонансов (символы  $\Omega_{pk}$  ( $k = 1; 2; 3$ )) в дисках с различными значениями параметра  $k_1$ . Легко заме-

тить, что чувствительность числовых значений резонансных частот к вариациям параметра  $k_1$  максимальна для частот первого резонанса и резко уменьшается для частот последующих по номеру резонансов.

Таблица 1

Частоты электромеханических резонансов радиально колеблющегося тонкого диска

$k_1$	$\Omega_{p1}$	$\Omega_{p2}$	$\Omega_{p3}$
0,00	1,841184	5,331443	8,536316
0,05	1,878980	5,341153	8,542253
0,10	1,915393	5,350843	8,548183
0,15	1,950511	5,360511	8,554112
0,20	1,984414	5,370155	8,560033
0,25	2,017172	5,379773	8,565949
0,30	2,048850	5,389364	8,571859
0,35	2,079508	5,398928	8,577761
0,40	2,109198	5,408461	8,583657
0,45	2,137971	5,417963	8,589546
0,50	2,165872	5,427433	8,595426
0,55	2,192942	5,436869	8,601299
0,60	2,219221	5,446270	8,607163
0,65	2,244744	5,455635	8,613018
0,70	2,269547	5,464962	8,618864
0,75	2,293658	5,474251	8,624701
0,80	2,317109	5,483500	8,630528
0,85	2,339926	5,492708	8,636344
0,90	2,362135	5,501874	8,642150
0,95	2,383761	5,510998	8,647944
1,00	2,404826	5,520078	8,653728

Термины «электромеханический резонанс» и «электромеханический антирезонанс» обусловлены следующими обстоятельствами. На частоте  $\Omega_p$  силы упругости

$\sigma_{\rho\rho}^{\text{упр}}(\rho) = c_{11} \partial u_{\rho} / \partial \rho + c_{12} u_{\rho} / \rho$ , которые в лю-  
бом цилиндрическом сечении  $\rho = \text{const}$  урав-  
новешивают силы Кулона  $\sigma_{\rho\rho}^K = e_{31}^* U_0 / \alpha$ , об-  
ращаются практически в нуль на поверхности  
 $\rho = R$ . Вследствие этого силы Кулона  $\sigma_{\rho\rho}^K$   
практически беспрепятственно отклоняют от  
положения равновесия материальные частицы  
цилиндрического слоя  $\rho = R$ . Естественно, что  
радиальные смещения материальных частиц  
этого слоя резко возрастают. Поскольку мате-  
риальные частицы диска достаточно жестко  
связаны между собой, постольку увеличение  
радиальных смещений в сечении  $\rho = R$  сопро-  
вождается увеличением смещений по всему  
объему диска. При этом пьезокерамический  
диск начинает потреблять существенно боль-  
шую энергию от источника колебаний, т. е. от  
генератора разности электрических потенциа-  
лов. Состояние физической системы, при кото-  
ром потребляется максимальное количество  
энергии от источника, который питает эту сис-  
тему, называется резонансным или просто ре-  
зонансом. Таким образом, на частоте  $\Omega_{\rho}$  ради-  
ально колеблющийся тонкий пьезокерамичес-  
кий диск входит в состояние резонанса и по-  
требляет от генератора гармонических колеба-  
ний, который, как известно, обладает беско-  
нечным запасом энергии, максимальное коли-  
чество энергии. Говоря иными словами, элек-  
трический ток в проводниках (рис. 2) сущест-  
венно увеличивается. Поскольку амплитудное  
значение  $U_0$  разности электрических потен-  
циалов остается постоянным, постольку уве-  
личение тока обеспечивается уменьшением  
модуля электрического импеданса  $Z(\omega)$ .

На частоте электромеханического анти-  
резонанса наблюдается минимальное потребле-  
ние энергии от источника радиальных колеба-  
ний, т. е. от генератора электрических сигна-  
лов. На частоте  $\Omega_a$  распределение объемной  
деформации  $\varepsilon_V = \varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}$  вдоль радиуса диска  
таково, что интеграл от аксиального компонен-  
та  $D_z$  вектора электрической индукции стано-  
вится минимальным. В пределе, когда механи-  
ческая добротность  $Q_m \rightarrow \infty$ , т. е. в случае от-  
сутствия потерь энергии упругих колебаний в  
материале диска, интеграл становится равным  
нулю. Процедуру интегрирования выполняет  
электродированная поверхность диска. Мини-  
мальному, в пределе – нулевому, значению  
интеграла соответствует минимальный (нуле-

вой) электрический заряд на электродирован-  
ных поверхностях колеблющегося диска.  
Электрический ток в проводниках и заряд на  
электродированных поверхностях диска ли-  
нейно связаны между собой, т. е. минимально-  
му (нулевому) заряду соответствует мини-  
мальный (в пределе – нулевой) электрический  
ток в проводниках. Поскольку разность потен-  
циалов  $U_0$  на выходе идеального генератора  
электрического напряжения является постоян-  
ной величиной, постольку уменьшение ампли-  
туды электрического тока в проводниках про-  
исходит из-за увеличения (в пределе – до бес-  
конечности) электрического импеданса колеб-  
лющегося диска.

На врезке в поле рис. 3 показано изме-  
нение модуля электрического импеданса в  
ближайшей окрестности частоты первого  
электромеханического антирезонанса.

Опираясь на полученные результаты,  
рассмотрим простейший (рис. 1) дисковый  
пьезоэлектрический трансформатор.

## 2. Математическая модель простей- шего дискового пьезоэлектрического транс- форматора.

Сообразно показанному на рис. 1 рас-  
положению электродов, в объеме пьезокера-  
мического диска можно выделить три обла-  
сти, а именно: область 1 ( $0 \leq \rho \leq R_1$ ), область 2  
( $R_1 \leq \rho \leq R_2$ ) и область 3 ( $R_2 \leq \rho \leq R$ ). Об-  
ласть 2 отличается от областей 1 и 3 гранич-  
ными электрическими условиями. Действи-  
тельно, в области 2 аксиальный компонент  
 $D_z^{(2)}$  вектора электрической индукции должен  
обращаться в нуль на поверхностях  $z = 0$  и  
 $z = \alpha$  [25]. Поскольку рассматривается тон-  
кий диск, то из сказанного выше следует, что

$$D_z^{(2)} = 0 \forall (\rho, z) \in V, \quad (2.1)$$

где  $V$  - объем диска.

Из равенства (1.4) при  $D_z^{(2)} = 0$  следует,  
что

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z} = \frac{e_{31}^*}{\chi_{33}} (\varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + \varepsilon_{\phi\phi}^{(2)}), \quad (2.2)$$

где  $\Phi^{(2)}$  - электрический потенциал, а  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(2)}$  и  
 $\varepsilon_{\phi\phi}^{(2)}$  - деформации сжатия-растяжения во вто-  
рой области. Подставляя производную  
 $\partial \Phi^{(2)} / \partial z$  в соотношения (1.3), получаем  
формулы для расчета механических напря-  
жений  $\sigma_{\rho\rho}^{(2)}$  и  $\sigma_{\phi\phi}^{(2)}$  в области без электродного  
покрытия:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(2)} &= c_{11}^D \varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + c_{12}^D \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)}, & \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R) &= 0. \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(2)} &= c_{12}^D \varepsilon_{\rho\rho}^{(2)} + c_{11}^D \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(2)},\end{aligned}\quad (2.3)$$

где  $c_{11}^D = c_{11}^E + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^c$  и  $c_{12}^D = c_{12}^E + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^c$  - модули упругости, которые учитывают согласное (связанное) действие сил упругости и сил Кулона.

В областях под электродами, т. е. в областях 1 и 3, обобщенный закон Гука записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{(1)} &= c_{11} \varepsilon_{\rho\rho}^{(1)} + c_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + e_{33}^* U_0 / \alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(1)} &= c_{12} \varepsilon_{\rho\rho}^{(1)} + c_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(1)} + e_{33}^* U_0 / \alpha, \\ \sigma_{\rho\rho}^{(3)} &= c_{11} \varepsilon_{\rho\rho}^{(3)} + c_{12} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} + e_{33}^* U_2 / \alpha, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{(3)} &= c_{12} \varepsilon_{\rho\rho}^{(3)} + c_{11} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(3)} + e_{33}^* U_2 / \alpha.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Подставляя соотношения (2.4), (2.3) и (2.5) в уравнение установившихся колебаний (1.2), получаем выражения для расчета радиальных компонентов  $u_\rho^{(k)}(\rho)$  ( $k = 1; 2; 3$ ) вектора смещения материальных частиц  $k$ -й области диска:

$$u_\rho^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\gamma_1 \rho), \quad (2.6)$$

$$u_\rho^{(2)}(\rho) = A_2 J_1(\gamma_2 \rho) + A_3 N_1(\gamma_2 \rho), \quad (2.7)$$

$$u_\rho^{(3)}(\rho) = A_4 J_1(\gamma_1 \rho) + A_5 N_1(\gamma_1 \rho), \quad (2.8)$$

где  $A_1, \dots, A_5$  - подлежащие определению константы;  $\gamma_1 = \omega / v_1$  ( $v_1 = \sqrt{c_{11} / \rho_0}$ ) - волновое число радиальных колебаний в 1 и 3-й областях дискового трансформатора;  $\gamma_2 = \omega / v_2$  ( $v_2 = \sqrt{c_{11}^D / \rho_0} = v_1 \sqrt{1 + K_p^2}$ ) - волновое число радиальных колебаний в области без электродного покрытия;  $N_1(\gamma_k \rho)$  ( $k = 1; 2$ ) - функции Неймана первого порядка.

На условных границах раздела областей должны выполняться условия кинематического и динамического сопряжения решений:

$$u_\rho^{(1)}(R_1) - u_\rho^{(2)}(R_1) = 0, \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(R_1) - \sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_1) = 0, \quad (2.10)$$

$$u_\rho^{(2)}(R_2) - u_\rho^{(3)}(R_2) = 0, \quad (2.11)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2)}(R_2) - \sigma_{\rho\rho}^{(3)}(R_2) = 0. \quad (2.12)$$

Условия (2.9) - (2.12) дополняются условием на границе диска  $\rho = R$ . В случае шарнирного или свободного (мягкого) закрепления оно записывается в следующем виде:

Подставляя выражения (2.6) - (2.8) в формулы для расчета деформаций  $\varepsilon_{\rho\rho}^{(k)} = \partial u_\rho^{(k)} / \partial \rho$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(k)} = u_\rho^{(k)} / \rho$  ( $k = 1; 2; 3$ ), а полученные результаты - в соотношения (2.3) - (2.5), получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{n=1}^5 \alpha_{mn} A_n = P_m \quad (m; n = 1, \dots, 5), \quad (2.14)$$

где  $\alpha_{11} = J_1(\Omega r_1)$ ;  $\Omega = \gamma_1 R$ ;  $r_1 = R_1 / R$ ;

$$\alpha_{12} = -J_1(\Omega r_1 / \xi); \quad \xi = \sqrt{1 + K_p^2};$$

$$\alpha_{13} = -N_1(\Omega r_1 / \xi); \quad \alpha_{14} = \alpha_{15} = 0; \quad P_1 = 0;$$

$$\alpha_{21} = J_0(\Omega r_1) - \frac{1 - k_1}{\Omega r_1} J_1(\Omega r_1); \quad k_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}};$$

$$\alpha_{22} = -\xi \left[ J_0(\Omega r_1 / \xi) - \frac{1 - k_2}{\Omega r_1 / \xi} J_1(\Omega r_1 / \xi) \right];$$

$$k_2 = \frac{c_{12}^D}{c_{11}^D} = \frac{k_1 + K_p^2}{1 + K_p^2};$$

$$\alpha_{23} = -\xi \left[ N_0(\Omega r_1 / \xi) - \frac{1 - k_2}{\Omega r_1 / \xi} N_1(\Omega r_1 / \xi) \right];$$

$$\alpha_{24} = \alpha_{25} = 0; \quad P_2 = -q \frac{U_0}{\Omega}; \quad q = \frac{Re e_{31}^*}{\alpha c_{11}}; \quad \alpha_{31} = 0;$$

$$\alpha_{32} = J_1(\Omega r_2 / \xi); \quad r_2 = R_2 / R; \quad \alpha_{33} = N_1(\Omega r_2 / \xi);$$

$$\alpha_{34} = -J_1(\Omega r_2); \quad \alpha_{35} = -N_1(\Omega r_2); \quad P_3 = 0;$$

$$\alpha_{41} = 0; \quad \alpha_{42} = \xi \left[ J_0(\Omega r_2 / \xi) - \frac{1 - k_2}{\Omega r_2 / \xi} J_1(\Omega r_2 / \xi) \right];$$

$$\alpha_{43} = \xi \left[ N_0(\Omega r_2 / \xi) - \frac{1 - k_2}{\Omega r_2 / \xi} N_1(\Omega r_2 / \xi) \right];$$

$$\alpha_{44} = - \left[ J_0(\Omega r_2) - \frac{1 - k_1}{\Omega r_2} J_1(\Omega r_2) \right];$$

$$\alpha_{45} = - \left[ N_0(\Omega r_2) - \frac{1 - k_1}{\Omega r_2} N_1(\Omega r_2) \right]; \quad P_4 = q \frac{U_2}{\Omega};$$

$$\alpha_{51} = \alpha_{52} = \alpha_{53} = 0; \quad \alpha_{54} = J_0(\Omega) - \frac{1 - k_1}{\Omega} J_1(\Omega);$$

$$\alpha_{55} = N_0(\Omega) - \frac{1 - k_1}{\Omega} N_1(\Omega); \quad P_5 = -q \frac{U_2}{\Omega}.$$

Для определения коэффициента трансформации, т. е. для построения математической модели простейшего пьезокерамического трансформатора, необходимо определить коэффициенты  $A_1$ ,  $A_4$  и  $A_5$ . Решение системы уравнений (2.14) доставляет следующие расчетные соотношения:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{qU_0}{\Omega} A_{11} - \frac{qU_2}{\Omega} A_{12}, \\ A_4 &= -\frac{qU_0}{\Omega} A_{41} + \frac{qU_2}{\Omega} A_{42}, \\ A_5 &= \frac{qU_0}{\Omega} A_{51} - \frac{qU_2}{\Omega} A_{52}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $A_{11} = B_1/D_0$ ;  $A_{12} = C_1/D_0$ ;  $A_{41} = B_4/D_0$ ;  $A_{42} = C_4/D_0$ ;  $A_{51} = B_5/D_0$ ;  $A_{52} = C_5/D_0$ ;

$$\begin{aligned} D_0 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{vmatrix}; \\ B_1 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \\ 0 & 0 & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{vmatrix}; \\ C_1 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 & 0 \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \end{vmatrix}; \\ B_4 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{55} \end{vmatrix}; \\ C_4 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{35} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{45} + \alpha_{55} \end{vmatrix}; \\ B_5 &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{54} \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$U_2 = i\omega C_3^\sigma Z_i U_0 K_p^2 \Psi_1(\Omega, R_2) - i\omega C_3^\sigma Z_i U_2 K_p^2 \Psi_2(\Omega, R_2) + i\omega C_3^\sigma Z_i U_2,$$

где  $\Psi_1(\Omega, R_2) = \frac{2}{\Omega(1-r_2^2)} \{A_{41}[J_1(\Omega) - r_2 J_1(\Omega r_2)] - A_{51}[N_1(\Omega) - r_2 N_1(\Omega r_2)]\}$ ;  $r_2 = R_2/R$ ;

$$\Psi_2(\Omega, R_2) = \frac{2}{\Omega(1-r_2^2)} \{A_{42}[J_1(\Omega) - r_2 J_1(\Omega r_2)] - A_{52}[N_1(\Omega) - r_2 N_1(\Omega r_2)]\}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$U_2 = U_0 K_2(\Omega, \Pi), \quad (2.18)$$

где

$$K_2(\Omega, \Pi) = \frac{i\omega C_3^\sigma Z_i K_p^2 \Psi_1(\Omega, R_2)}{1 - i\omega C_3^\sigma Z_i [1 - K_p^2 \Psi_2(\Omega, R_2)]}.$$

$$C_5 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} + \alpha_{54} \end{vmatrix}.$$

Из определений (2.15) коэффициентов  $A_1$ ,  $A_4$  и  $A_5$  следует, что они зависят от значений двух потенциалов, т. е. дисковый пьезоэлектрический трансформатор (как, впрочем, и любой пьезоэлектрический трансформатор) является функциональным элементом пьезоэлектроники с отрицательной обратной связью.

Очевидно, что потенциалы  $U_0$  и  $U_2$  связаны между собой линейной зависимостью. Для того чтобы установить эту связь, еще раз рассмотрим изложенную в работе [1] схему вычисления потенциала  $U_2$ . Согласно [1], электрический заряд  $Q^{(3)}$  на покрывающей область 3 пьезокерамического диска кольцевых электродах определяется следующим образом:

$$Q^{(3)} = 2\pi \int_{R_2}^R \rho D_\rho^{(3)} d\rho = 2\pi \int_{R_2}^R \rho \left[ \frac{e_{31}^*}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho^{(3)})}{\partial \rho} - \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} \right] d\rho, \quad (2.16)$$

где  $u_\rho^{(3)} = A_4 J_1(\Omega \rho/R) + A_5 N_1(\Omega \rho/R)$ .

Выполняя интегрирование в выражении (2.16), получаем

$$Q^{(3)} = 2\pi e_{31}^* [R u_\rho^{(3)}(R) - R_2 u_\rho^{(3)}(R_2)] - C_3^\sigma U_2, \quad (2.17)$$

где  $C_3^\sigma = \pi(R^2 - R_2^2) \chi_{33}^\sigma / \alpha$  - статическая электрическая емкость электродированной области 3. Поскольку  $U_2 = -i\omega Q^{(3)} Z_i$ , постольку из соотношения (2.17) следует

Подставляя выражение (2.18) в соотношение для расчета коэффициента  $A_1$ , определяем радиальное смещение  $u_\rho^{(1)}(\rho)$  с учетом отрицательной обратной связи в объеме радиально колеблющегося пьезокерамического диска

$$u_p^{(1)}(\rho) = A_1 J_1(\Omega \rho / R) = \frac{q U_0}{\Omega} [A_{11} - K_2(\Omega, \Pi) A_{12}] J_1(\Omega \rho / R). \quad (2.19)$$

Электрический заряд  $Q^{(1)}$  на электродах области 1 определяется следующим образом [1]:

$$Q^{(1)} = 2\epsilon_{31}^* \pi R_1 u_p^{(1)}(R_1) - C_1^\sigma U_0, \quad (2.20)$$

где  $C_1^\sigma = \pi R_1^2 \chi_{33}^\sigma / \alpha$  - статическая электрическая емкость первой области. Электрический импеданс  $Z_1(\omega)$  этой области записывается [1] в виде

$$Z_1(\omega) = \frac{U_0}{-i\omega Q^{(1)}}. \quad (2.21)$$

Подставляя выражение (2.19) в определение (2.20) электрического заряда  $Q^{(1)}$ , а полученный результат - в формулу (2.21), получаем

$$Z_1(\omega) = -\frac{1}{i\omega C_1^\sigma F_1^{oc}(\Omega, \Pi)},$$

где

$$F_1^{oc}(\Omega, \Pi) = \frac{2K_p^2}{\Omega r_1} [A_{11} - K_2(\Omega, \Pi) A_{12}] J_1(\Omega r_1) - 1$$

- частотно зависящая функция, которая учитывает отрицательную обратную связь (символ ос) в объеме пьезоэлектрического диска;  $r_1 = R_1/R$  - безразмерный радиус электрода первичной электрической цепи трансформатора.

Зная электрический импеданс  $Z_1(\omega)$ , можно определить потенциал  $U_0$  на электроде

$$U_0 = \frac{U_1 Z_1(\omega)}{Z_i + Z_1(\omega)} = \frac{U_1}{1 - i\omega C_1^\sigma Z_i F_1^{oc}(\Omega, \Pi)}. \quad (2.22)$$

Подставляя соотношение (2.22) в выражение (2.18), определяем коэффициент трансформации простейшего дискового пьезоэлектрического трансформатора

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{K_2(\Omega, \Pi)}{1 - i\omega C_1^\sigma Z_i F_1^{oc}(\Omega, \Pi)}. \quad (2.23)$$

Выражение (2.23) является математической моделью дискового пьезокерамического трансформатора, которая учитывает обратные связи, существующие в объеме колеблющегося диска.

На рис. 4 показаны графики модуля коэффициента трансформации для различных относительных размеров электродов в первичной и вторичной электрических цепях дискового пьезоэлектрического трансформатора. Значения материальных констант пьезокерамики те же, что были использованы при построении рис. 3. Радиус диска -  $R = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м, толщина диска -  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$  м. Выходной электрический импеданс генератора -  $Z_i = 50$  Ом, импеданс электрической нагрузки -  $Z_n = 1000$  Ом.

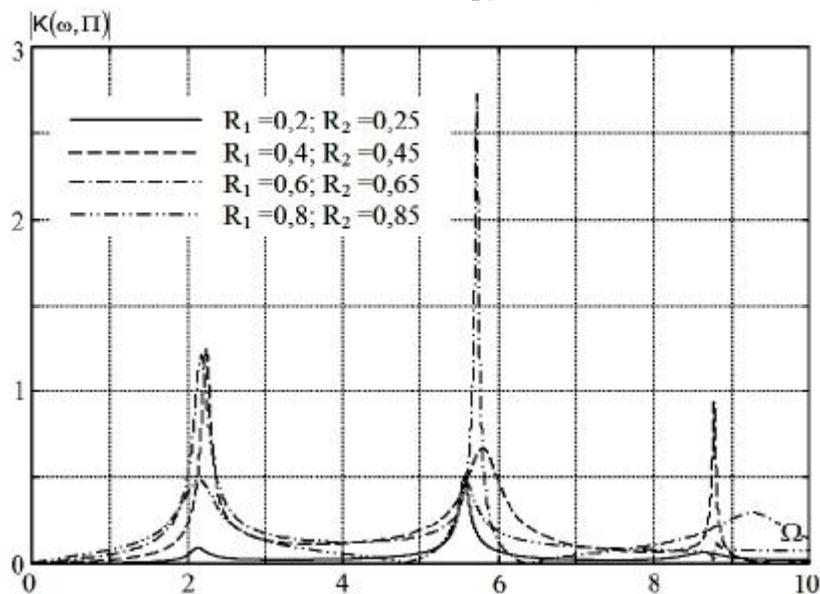


Рис. 4. Абсолютные значения коэффициента трансформации для различных размеров электродов в первичной и вторичной электрических цепях дискового пьезоэлектрического трансформатора

Легко заметить, что частотно зависимые значения коэффициента трансформации существенно образом изменяются при изменении размеров электродов. Частоты локальных максимумов модуля функции  $K(\omega, \Pi)$  также зависят от размеров электродов. Вместе с тем, частоты локальных максимумов располагаются в ближайшей окрестности частот электромеханических резонансов радиально колеблющегося диска (см. табл. 1). Таким образом, выбор размеров диска и первичная оценка частот максимальных значений коэффициента трансформации могут быть осуществлены на основании данных табл. 1.

На рис. 5 показаны графики модуля функции  $K(\omega, \Pi)$ , которые рассчитывались для фиксированных значений радиусов электродов ( $R_1 = 1,2 \cdot 10^{-2}$  м и  $R_2 = 1,5 \cdot 10^{-2}$  м) диска, параметры которого указаны в ком-

ментариях к рис. 3, и фиксированного значения импеданса источника  $Z_{\text{и}} = 50$  Ом. Варьируемым параметром для семейства кривых на рис. 5 является значение электрической нагрузки  $Z_{\text{н}}$ . При малом значении  $Z_{\text{н}}$  трансформатор работает в режиме, близком к короткому замыканию во вторичной цепи. Коэффициент трансформации при этом, естественно, стремится к нулю. При больших значениях нагрузочного сопротивления возрастает глубина отрицательной обратной связи, что опять сопровождается уменьшением коэффициента трансформации. Несложно прийти к заключению, что для каждой конкретной конструкции пьезоэлектрического трансформатора существует оптимальное (в смысле величины коэффициента трансформации) значение электрического импеданса нагрузки.

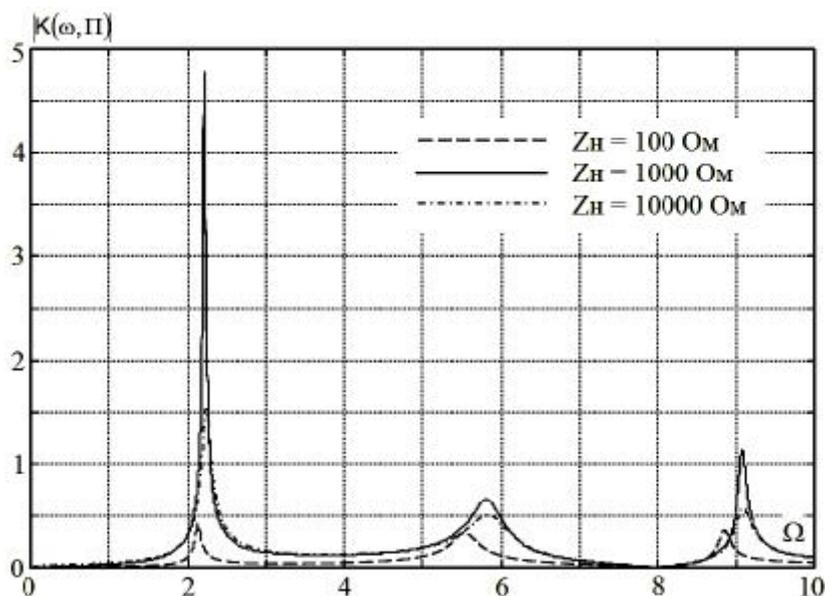


Рис. 5. Абсолютные значения коэффициента трансформации для различных значений электрической нагрузки  $Z_{\text{н}}$  во вторичной электрической цепи дискового пьезоэлектрического трансформатора

**Выводы.** В настоящей статье развиты основные положения работы [1] и была построена математическая модель простейшего дискового трансформатора. В ходе построения и последующего исследования математической модели были установлены следующие факты:

- пьезоэлектрический дисковый трансформатор является функциональным элементом пьезоэлектроники с отрицательными обратными связями;

- для первичной оценки частот максимальных значений коэффициента трансформации можно использовать результаты расчета частот электромеханических резонансов радиально колеблющегося пьезокерамического диска;

- абсолютные значения коэффициента трансформации существенно образом зависят от значений импеданса электрической нагрузки.

## Список літератури

- Петрищев О. Н. Принципы и методы расчета передаточных характеристик дисковых пьезоэлектрических трансформаторов. Часть 1. Принципы математического моделирования трансформаторов, работающих на планарных осесимметричных колебаниях пьезокерамических дисков / О. Н. Петрищев, К. В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2015. – № 3.
- Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы / В. В. Лавриненко. – М. : Энергия, 1975. – 112 с.
- Кудзіновська І. П. Математичне моделювання коливань круглої п'єзокерамічної пластини з урахуванням в'язкопружності матеріалу / І. П. Кудзіновська // Вісник Запорізького національного університету : фізико-математичні науки. – 2014. – № 1. – С. 59–66.
- Wu Lang, Chure Ming-Cheng, Chen Yeong-Chin, Wu King-Kung, Chen Bing-Huei (2012). Electrode size and dimensional ratio effect on the resonant characteristics of piezoelectric ceramic disk. *Ceramic Materials – Progress in Modern Ceramics*, pp. 25–40.
- Бондаренко А. А. Спектральный и модовый анализ планарных колебаний прямоугольных пьезокерамических пластин / А. А. Бондаренко, В. В. Мелешко, С.-L. Huang, С.-С. Ма // Консонанс-2005 : акустичний симпозіум. – 2005. – С. 14–19.
- Hector Calas, Eduardo Moreno, Jose Antonio Eiras, Arturo Vera, Roberto Munoz, Lorenzo Leija (2008). Model for radial modes in a thin piezoelectric annular array. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 47 (10), pp. 8057–8064.
- Dragan Mančić, Violeta Dimić, Milan Radmanović (2002). Resonance frequencies of PZT piezoceramic disks: a numerical approach. *Facta Universitatis. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 3 (12), pp. 431–442.
- Безверхий О. Вплив режиму електричного навантаження на характеристики коливань п'єзокерамічних резонаторів / О. Безверхий, Л. Зінчук, В. Карлаш // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2013. – № 18. – С. 9–20.
- Зубцов В. И. Математическая модель преобразователя статических механических напряжений внутри деформируемых материалов / В. И. Зубцов // Инженерная физика. – 2004. – № 4. – С. 31–36.
- Хуторненко С. В. Математическая модель пьезоэлектрического резонатора при наличии градиентного поля в плоскости кристаллического элемента / С. В. Хуторненко, А. Н. Воейков, Д. П. Васильчук // Наукові праці ДонНТУ. – 2011. – Вип. 21 (189). – С. 168–172. – (Серія «Гірничо-електромеханічна»).
- Шульга М. О. Ефективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки / М. О. Шульга, В. Л. Карлаш // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2006. – № 3. – С. 225–237.
- Шульга М. О. Амплітудно-фазові характеристики радіальних коливань тонкого п'єзокерамічного диска біля резонансів / М. О. Шульга, В. Л. Карлаш // Доповіді Національної академії наук України. – 2013. – № 9. – С. 80–86.
- Янчевский И. В. Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 16. – С. 303–313.
- Karlash, V. L. (2006). Longitudinal and lateral vibrations of a plate piezoceramic transformer. *Ukr. J. Phys.*, 51 (10), pp. 986–992.
- Карлаш В. Л. Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных пьезокерамических стержней с разделенными электродами / В. Л. Карлаш // Прикладная механика. – 2013. – Том 49, № 3. – С. 125–134.
- Богдан А. В. Исследование характеристик пьезоэлектрического трансформатора на основе радиальных колебаний в тонких пьезокерамических дисках / А. В. Богдан, О. Н. Петрищев, Ю. И. Якименко, Ю. Ю. Яновская // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 1. – С. 269–274.
- Богдан А. В. Математическое моделирование колебаний тонких пьезокерамических дисков для создания функциональных элементов пьезоэлектроники / А. В. Богдан, О. Н. Петрищев, Ю. И. Якименко, Ю. Ю. Яновская // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 2. – С. 35–42.

18. Simon Lineykin and Sam Ben-Yaakov (2004). Feedback isolation by piezoelectric transformers: comparison of amplitude to frequency modulation. *35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, Aachen, Germany, pp. 1834–1840.
19. Peerasaksothol, M., Srilomsak, S., Laoratanakul, P., Kulworawanichpong, T. (2011). Resonance frequencies of PZT piezoceramic disks: a numerical approach. *Facta Universitatis. European Journal of Scientific Research*, 64 (2), pp. 189–205.
20. Ozeri, S., Shmilovitz, D. A time domain measurements procedure of piezoelectric transformers equivalent scheme parameters. *ISCAS*, pp. 2281–2284.
21. Buchacz, A., Placzek, M., Wrobel, A. (2014). Modelling of passive vibration damping using piezoelectric transducers – the mathematical model. *Maintenance and reliability*, 16 (2), pp. 301–306.
22. Paerand, Yu., Kryvoshei, D. (2011). Secondary power supplies with piezoelectric transformers. *Electronics and Nanotechnology*. Kyiv, p. 55.
23. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса / О. Н. Петрищев. – К. : Аверс, 2012. – 300 с.
24. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
25. Гринченко В. Т. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – К. : Наукова думка, 1989. – 280 с.
3. Kudzinovs'ka, I. P. (2014). Mathematical modelling of vibrations of round piezoceramic plate taking into account viscoelasticity of material. *Visnyk Zaporizkogo natsionalnogo universytetu: fizyko-matematychni nauky*, (1), pp. 59–66 [in Ukrainian].
4. Wu Lang, Chure Ming-Cheng, Chen Yeong-Chin, Wu King-Kung, Chen Bing-Huei (2012). Electrode size and dimensional ratio effect on the resonant characteristics of piezoelectric ceramic disk. *Ceramic Materials – Progress in Modern Ceramics*, pp. 25–40.
5. Bondarenko, A. A., Meleshko, V. V., Huang, C.-L., Ma, C.-C. (2005). Spectral and mode analysis of planar vibrations of rectangular piezoceramic plates. *Acoustic Symposium "Consonance 2005"*, pp. 14–19 [in Russian].
6. Hector Calas, Eduardo Moreno, Jose Antonio Eiras, Arturo Vera, Roberto Munoz, Lorenzo Leija (2008). Model for radial modes in a thin piezoelectric annular array. *Jpn. J. Appl. Phys.*, 47 (10), pp. 8057–8064.
7. Dragan Mančić, Violeta Dimić, Milan Radmanović (2002). Resonance frequencies of PZT piezoceramic disks: a numerical approach. *Facta Universitatis. Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics*, 3 (12), pp. 431–442.
8. Bezverkhy, A., Zinchuk, L., Karlash, V. (2013). An influence of electric loading on piezoceramic resonators' vibrations characteristics. *Physico-mathematical modeling and informational technologies*, (18), pp. 9–20 [in Ukrainian].
9. Zubczov, V.I. (2004). Mathematical model of the static mechanical stresses converter within the deformable material. *Engineering Physics*, (4), pp. 31–36 [in Russian].
10. Khutornenko, S. V., Vojeykov, A. N., Vasylchuk, D. P. (2011). Mathematic model of piezoelectrical resonator at the availability of gradient field in the plane of crystalline element. *Naukovi pratsi Donetskogo natsionalnogo tehničnogo universytetu. Seriya: «Girnycho-elektromehanichna»*, 21 (189), pp. 168–172 [in Russian].
11. Shul'ga, M. O., Karlash, V. L. (2006). An efficiency of electromechanical energy transformation at resonant vibrations of piezoceramics constructional elements. *Fizyko-matematychne modelyuvannya ta informatsiy-ni tehnologii*, (3), pp. 225–237 [in Ukrainian].
12. Shul'ga, M. O., Karlash, V. L. (2013). Amplitude-phase characteristics of radial vibrations

## References

1. Petrishchev, O. N., Bazilo, C. V. (2015). Calculation principles and methods of the transfer characteristics of disk piezoelectric transformers. Part 1. Principles of mathematical modeling of transformers that operate on planar axisymmetric vibrations of a piezoceramic disk. *Visnyk Cherkaskogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu*, (3) [in Russian].
2. Lavrinenko, V. V. (1975). Piezoelectric transformers. Moscow: Energy, 112 p. [in Russian].

- of a thin piezoceramic disk near resonances. *Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrainy*, (9), pp. 80–86 [in Ukrainian].
13. Yanchevskiy, I. V. (2011). Minimization of deflections of round electroelastic bimorph plate under impulsive loading. *Problemy obchyslyvalnoyi mehaniky i mitsnosti konstruktiv*, (16), pp. 303–313 [in Russian].
  14. Karlash, V. L. (2006). Longitudinal and lateral vibrations of a plate piezoceramic transformer. *Ukr. J. Phys.*, 51 (10), pp. 986–992.
  15. Karlash, V. L. (2013). Forced electromechanical oscillations of rectangular piezoceramic rods with divided electrodes. *Prikladnaya mehanika*, 49 (3), pp. 125–134 [in Russian].
  16. Bogdan, A. V., Petrishchev, O. N., Yakimenko, Yu. I., Yanovskaya Yu. Yu. (2009). Investigation of the characteristics of piezoelectric transformer on the basis of radial oscillations in thin piezoceramic disks. *Elektronika i svyaz. Tematicheskyy vypusk. "Elektronika i nanotekhnologiy"*, (1), pp. 269–274 [in Russian].
  17. Bogdan, A. V., Petrishchev, O. N., Yakimenko, Yu. I., Yanovskaya, Yu. Yu. (2009). Mathematical modeling of vibrations of thin piezoceramic disks to create functional piezoelectronics elements. *Elektronika i svyaz. Tematicheskyy vypusk. "Elektronika i nanotekhnologiy"*, (2), pp. 35–42 [in Russian].
  18. Simon Lineykin and Sam Ben-Yaakov (2004). Feedback isolation by piezoelectric transformers: comparison of amplitude to frequency modulation. *35th Annual IEEE Power Electronics Specialists Conference*, Aachen, Germany, pp. 1834–1840.
  19. Peerasaksophol, M., Srilomsak, S., Laoratanakul, P., Kulworawanichpong, T. (2011). Resonance frequencies of PZT piezoceramic disks: a numerical approach. *Facta Universitatis. European Journal of Scientific Research*, 64 (2), pp. 189–205.
  20. Ozeri, S., Shmilovitz, D. (2006). A time domain measurements procedure of piezoelectric transformers equivalent scheme parameters. *ISCAS*, pp. 2281–2284.
  21. Buchacz, A., Placzek, M., Wrobel, A. (2014). Modelling of passive vibration damping using piezoelectric transducers – the mathematical model. *Maintenance and reliability*, 16 (2), pp. 301–306.
  22. Paerand, Yu., Kryvoshei, D. (2011). Secondary power supplies with piezoelectric transformers. *Electronics and Nanotechnology*. Kyiv, pp. 55.
  23. Petrishchev, O. N. (2012). Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kiev: Avers, 300 p. [in Russian].
  24. Handbook on mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (1979). Ed. by Milton Abramowitz and Irene Stegun. Moscow: Science, 832 p. [in Russian].
  25. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989). Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kyiv: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].

**O. N. Petrishchev**<sup>1</sup>, *Dr. Tech.Sc., professor*,

**K. V. Bazilo**<sup>2</sup>, *Ph.D. (Eng.), associate professor*

<sup>1</sup>National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"

Peremogy ave., 37, Kyiv, 03056, Ukraine

<sup>2</sup>Cherkasy State Technological University

Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine

## PRINCIPLES AND METHODS OF THE CALCULATION OF TRANSFER CHARACTERISTICS OF DISK PIEZOELECTRIC TRANSFORMERS

### Part 2. The procedure of calculation of parameters and characteristics of the simplest disk piezoelectric transformer

*With the help of a personal computer it is possible in a few hours to model many combinations of geometric, physical and mechanical parameters of specific design of piezoelectric transformer, and to find a combination thereof, which provides an implementation of the devices specified parameters. This allows to sharply reduce the number of natural experiments, which inevitably are carried out in*

*the process of new devices development. In addition, using a mathematical model it is easy to determine the characteristics sensitivity of piezoelectric transformer to variations of the elements parameters of its design. With the access to these dependences, we can implement a rational choice of products manufacturing technology, i.e. choose the least expensive technology from a number of ones. Thus, high-quality mathematical model can significantly reduce the time and cost of the development of piezoelectric transformers new models.*

*It is these sufficiently obvious circumstances that encouraged and encourage professionals to develop various aspects of the theory of piezoelectric transformers.*

*In most papers the described methods of piezoelectric transformers models constructing are mostly based on the use of equivalent electrical circuits and it does not allow analyzing of stress-strain state of solids with piezoelectric effects.*

*Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for calculating of characteristics and parameters of this class of functional elements of modern piezoelectronics. In this paper mathematical model of the simplest disk transformer is constructed. During the construction and subsequent study of mathematical model the following facts are determined:*

*– disk piezoelectric transformer is a functional element of piezoelectronics with negative feedback;*

*– for primary evaluation of frequencies of maximum values of transformation ratio the results of the calculation of frequencies of electromechanical resonances of radially oscillating piezoceramic disk can be used;*

*– absolute values of transformation ratio substantially depend on the values of electric load impedance.*

**Keywords:** *piezoelectric transformer, axially symmetric oscillations, physical processes, mathematical model.*

*Стаття надійшла до редакції 02.12.2015.*

*Статтю представляє д.т.н., професор О. М. Петрищев, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут».*