

О. Н. Петрищев¹, *д.т.н., профессор,*
К. В. Базило², *к.т.н., доцент*

¹Государственное предприятие «Киевский государственный
научно-исследовательский институт гидроприборов»

²Черкасский государственный технологический университет
б-р Шевченко, 460, Черкассы, 18006, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТЕРЖНЕВОГО ТИПА

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем.

Основной целью данной статьи является построение математической модели пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

Ключевые слова: *пьезоэлектрический стержневой элемент, физические процессы, математическая модель.*

Введение. Известно, что при динамическом деформировании упругого объекта различные участки его поверхности совершают колебания с различными амплитудами. Образуются области, которые называются узлами, в которых амплитуда колебаний материальных частиц поверхности деформируемого твердого тела принимает минимальные значения. Вместе с этим на поверхности колеблющегося объекта можно найти участки, где амплитуда колебаний принимает максимальные значения. Участки локальных максимумов амплитуд колебаний материальных частиц поверхности деформируемого твердого тела называются пучностями. Очевидно, что упругие деформации в узловых областях имеют существенно меньшие значения по сравнению с деформациями в пучностях. Если материал упругого объекта обладает пьезоэлектрическими свойствами, то поляризационные заряды, которые формируются в узлах и пучностях вследствие проявления прямого пьезоэлектрического эффекта, будут в значительной мере отличаться друг от друга по величине. Этот, в достаточной степени очевидный, факт используется при построении пьезоэлектрических трансформаторов. Если электрод вторичной электрической цепи разместить в области существования пучности, то на нагрузочном сопротивлении можно ожидать достаточно большое падение электрического напряжения. Естественно, что при размещении электрода в узловой области, следует ожидать суще-

ственного уменьшения выходной разности электрических потенциалов на нагрузочном сопротивлении во вторичной электрической цепи трансформатора.

Актуальность применения различных функциональных элементов пьезоэлектроники в силовых и информационных системах объясняется, прежде всего, их высокой надежностью [1] – интенсивность отказов составляет 10^{-6} , т. е. сопоставима с показателями надежности интегральных микросхем, а также малыми габаритами и весом, что в значительной мере облегчает решение проблемы миниатюризации таких систем.

Построению и исследованию математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов посвящено немало публикаций. Начиная с монографии [2], основы расчета передаточных характеристик пьезоэлектрических трансформаторов рассматривались, например, в работах [3–6]. Однако рассмотренные работы не объединены каким-либо системным подходом, имеют характер разрозненных эпизодов, на основании чего можно утверждать, что в настоящее время существует потребность в создании целостной методики построения математических моделей пьезоэлектрических трансформаторов, которая могла бы использоваться в качестве теоретической основы расчета их характеристик и параметров.

Таким образом, актуальность разработки физически содержательных математиче-

ских моделей пьезоэлектрических трансформаторов сохраняется и в настоящее время.

Целью данной работы является построение математической модели пьезоэлектрического трансформатора стержневого типа.

Для того, чтобы показать основные особенности математического моделирования пьезоэлектрических трансформаторов, рассмотрим простейшую конструкцию трансформатора, которая изображена на рис. 1. Призматический стержень длиной L с прямоугольным поперечным сечением размером $\alpha \times b$ изготовлен из поляризованной вдоль оси Ox_3 пьезокерамики типа ЦТС (цирконат титанат свинца). Нижняя поверхность $x_3 = 0$ стержня электродирована и заземлена. На верхней поверхности $x_3 = \alpha$ расположены два электрода (позиции 1 и 2 на рис. 1), которые образуют первичную и вторичную электрические цепи пьезоэлектрического трансформатора. Первичная цепь состоит из источника разности электрических потенциалов $U_1 e^{i\omega t}$ (U_1 – амплитудное значение разности электрических потенциалов; $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; ω – круговая частота смены знака разности потенциалов; t – время) с выходным электрическим импедансом Z_1 и электрода № 1. Вторичная электрическая цепь трансформатора состоит из электрода № 2 (позиция 2 на рис. 1) и электрической нагрузки Z_2 , на которой выделяется разность потенциалов $U_2 e^{i\omega t}$.

Очевидно, что системной функцией (математической моделью) пьезоэлектрического трансформатора является коэффициент трансформации $K(\omega, \Pi)$ (символ Π в списке аргументов комплекснозначной функции $K(\omega, \Pi)$ означает набор геометрических, физико-механических и электрических параметров пьезоэлектрического трансформатора), который определяется следующим образом:

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1}. \quad (1)$$

Принцип действия показанного на рис. 1 стержневого трансформатора в достаточной степени очевиден.

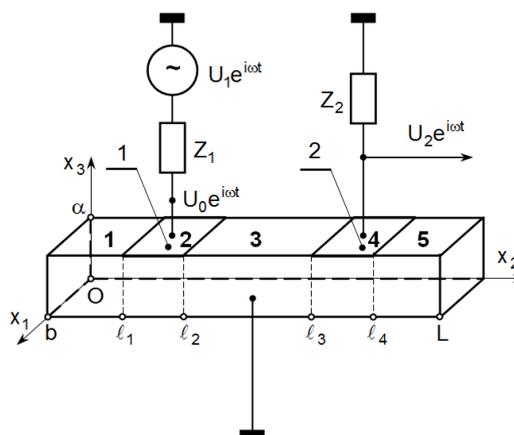


Рис. 1. Схематическое изображение конструкции стержневого пьезоэлектрического трансформатора

При подаче на электрод № 1 (позиция 1 на рис. 1) разности электрических потенциалов от внешнего источника в области $l_1 \leq x_2 \leq l_2$ пьезокерамического стержня из-за обратного пьезоэлектрического эффекта возникают вынужденные продольные колебания материальных частиц пьезоэлектрика. Благодаря упругим связям в процесс продольных гармонических колебаний вовлекаются все без исключения материальные частицы (элементарные объемы деформируемого твердого тела) пьезокерамического стержня. В результате прямого пьезоэлектрического эффекта на электроде № 2 вторичной электрической цепи появляется электрический заряд $Q_2(\omega)$, который своим электрическим полем приводит в движение свободные носители электричества в проводнике вторичной электрической цепи. Электрический ток $I_2(\omega) = -i\omega Q_2(\omega) e^{i\omega t}$, протекающий по проводнику во вторичной электрической цепи, формирует на электрической нагрузке Z_2 разность электрических потенциалов $U_2 e^{i\omega t} = -i\omega Z_2 Q_2(\omega) e^{i\omega t}$. Таким образом,

$$U_2 = -i\omega Z_2 Q_2(\omega). \quad (2)$$

Электрический заряд $Q_2(\omega)$ определяется через аксиальный компонент вектора электрической индукции $D_3^{(4)}(x_k)$ в деформируемом пьезоэлектрике в области $l_3 \leq x_2 \leq l_4$ следующим образом:

$$Q_2(\omega) = \int_{\ell_3}^{\ell_4} \int_0^b D_3^{(4)}(x_1, x_2, \alpha) dx_1 dx_2. \quad (3)$$

Как следует из уравнений физического состояния деформируемого пьезоэлектрика, компоненты вектора электрической индукции определяются компонентами тензора упругих деформаций. Уровень влияния того или иного компонента на электрическое состояние деформируемого пьезоэлектрика определяется компонентами матрицы пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta} \equiv e_{kij}$.

При оговоренном выше способе электрической поляризации пьезокерамического стержня матрицы его материальных констант имеют следующую конструкцию:

– матрица модулей упругости $c_{\beta\lambda}^E$, которые экспериментально определяются в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля (символ E) в объеме деформируемого пьезоэлектрика

$$|c_{\beta\lambda}^E| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = c_{55}^E$;
 $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$;

– матрица пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta}$

$$|e_{k\beta}| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $e_{15} = e_{24} = (e_{33} - e_{31})/2$; $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$;

– матрица диэлектрических проницаемостей χ_{ij}^e , элементы которой экспериментально определяются в режиме постоянства (равенства нулю) упругих деформаций (символ ε) в объеме исследуемого пьезоэлектрика

$$|\chi_{ij}^e| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^e & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^e & 0 \\ & & \chi_{33}^e \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $\chi_{11}^e = \chi_{22}^e \neq \chi_{33}^e$.

Так как источников и причин, которые бы способствовали развитию напряженно-деформированного состояния сдвига, в показанной на рис. 1 схеме нет по определению, то обобщенный закон Гука для различных участков стержня записывается следующим образом:

$$\sigma_{11}^{(m)}(x_k) = c_{11}^E \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + c_{12}^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + c_{12}^E \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) - e_{31} E_3^{(m)}(x_k), \quad (7)$$

$$\sigma_{22}^{(m)}(x_k) = c_{12}^E \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + c_{22}^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + c_{12}^E \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) - e_{31} E_3^{(m)}(x_k), \quad (8)$$

$$\sigma_{33}^{(m)}(x_k) = c_{12}^E \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + c_{12}^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + c_{33}^E \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) - e_{33} E_3^{(m)}(x_k), \quad (9)$$

где $m = 1, 2, \dots, 5$ – номер области стержня (рис. 1), в которой определяется напряженно-деформированное состояние; при записи соотношений (7)–(9) одинаковые по величине материальные константы обозначены, как это принято в механике деформируемого твердого тела, одинаковыми символами. Символами $\varepsilon_{11}^{(m)}(x_k)$, $\varepsilon_{22}^{(m)}(x_k)$ и $\varepsilon_{33}^{(m)}(x_k)$ обозначены деформации сжатия-растяжения в m -й области стержня вдоль координатных осей Ox_1 , Ox_2 и Ox_3 (рис. 1) соответственно; $E_3^{(m)}(x_k)$ – аксиальный компонент вектора напряженности электрического поля в m -й области деформируемого пьезокерамического стержня.

Будем рассматривать такой диапазон частот смены знака разности потенциалов на выходе генератора электрических сигналов, в котором длина волны упругих колебаний материальных частиц стержня соизмерима с его длиной L . Так как по определению призматического стержня должны в обязательном порядке выполняться сильные неравенства $\alpha/L \ll 1$ и $b/L \ll 1$, то можно утверждать, что в этом диапазоне частот напряженно-деформированное состояние стержня не меняется в пределах площади его поперечного сечения.

Предположим, что стержень колеблется в вакууме и не контактирует с другими материальными объектами. В этом случае на его гранях должны выполняться следующие, обусловленные третьим законом Ньютона, соотношения:

$$\sigma_{11}^{(m)}(x_k) \Big|_{x_1=0,b} = 0, \quad (10)$$

$$\sigma_{22}^{(m)}(x_k) \Big|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{22}^{(m)}(x_k) \Big|_{x_2=L} = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{33}^{(m)}(x_k) \Big|_{x_3=0,\alpha} = 0. \quad (12)$$

Условия (10) и (12) в рассматриваемом диапазоне частот выполняются не только на поверхности стержня, но и в любой точке внутри его объема. Это позволяет записать соотношения (7) и (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_{11}^E \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + c_{12}^E \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) &= -c_{12}^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + e_{31} E_3^{(m)}(x_k), \\ c_{12}^E \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + c_{33}^E \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) &= \\ &= -c_{12}^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + e_{33} E_3^{(m)}(x_k). \end{aligned} \quad (13)$$

Из системы уравнений (13) определяются компоненты тензора деформации $\varepsilon_{11}^{(m)}(x_k)$ и $\varepsilon_{33}^{(m)}(x_k)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} (c_{33}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + \\ &+ \frac{1}{\Delta_0} (c_{33}^E e_{31} - c_{12}^E e_{33}) E_3^{(m)}(x_k), \\ \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) &= -\frac{c_{12}^E}{\Delta_0} (c_{11}^E - c_{12}^E) \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k) + \\ &+ \frac{1}{\Delta_0} (c_{11}^E e_{33} - c_{12}^E e_{31}) E_3^{(m)}(x_k), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Delta_0 = c_{11}^E c_{33}^E - (c_{12}^E)^2$. При записи выражений (14) было учтено, что физическое состояние деформируемого пьезоэлектрика остается неизменным в пределах площади его поперечного сечения.

Подставляя выражения (14) в соотношение (8), получаем запись обобщенного закона Гука для одноосного напряженного состояния пьезокерамического стержня в области низких частот в следующем виде:

$$\sigma_{22}^{(m)}(x_2) = Y^E \varepsilon_{22}^{(m)}(x_2) - e_{31}^* E_3^{(m)}(x_2), \quad (15)$$

где $Y^E = c_{11}^E - (c_{12}^E)^2 / (c_{11}^E + c_{33}^E - 2c_{12}^E) / \Delta_0$ – модуль Юнга поляризованной вдоль оси Ox_3 пьезокерамики для режима одноосного сжатия-растяжения стержня вдоль оси Ox_2 ; $e_{31}^* = e_{31} + c_{12}^E [-e_{31} c_{33}^E - e_{33} c_{11}^E + c_{12}^E (e_{31} + e_{33})] / \Delta_0$ – пьезоэлектрический модуль для режима одно-

осного напряженного состояния пьезоэлектрического стержня.

Электрическое состояние деформируемого пьезокерамического стержня определяется вектором электрической индукции $\vec{D}^{(m)}(x_k)$, k -й компонент которого в общем случае определяется следующим образом [7]:

$$D_k^{(m)}(x_k) = e_{kij} \varepsilon_{ij}^{(m)}(x_k) + \chi_{kj}^\varepsilon E_j^{(m)}(x_k). \quad (16)$$

Поскольку сдвиговые деформации в рассматриваемом пьезокерамическом стержне отсутствуют по определению, постольку из общей формулировки (16) можно, принимая во внимание структуру матриц (5) и (6), записать следующие расчетные формулы:

$$D_1^{(m)}(x_k) = \chi_{11}^\varepsilon E_1^{(m)}(x_k),$$

$$D_2^{(m)}(x_k) = \chi_{11}^\varepsilon E_2^{(m)}(x_k), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D_3^{(m)}(x_k) &= e_{31} [\varepsilon_{11}^{(m)}(x_k) + \varepsilon_{22}^{(m)}(x_k)] + \\ &+ e_{33} \varepsilon_{33}^{(m)}(x_k) + \chi_{33}^\varepsilon E_3^{(m)}(x_k). \end{aligned} \quad (18)$$

Так как на гранях $x_1 = 0, b$ и $x_2 = 0, L$ должны выполняться условия [8]

$$D_1^{(m)}(x_k) \Big|_{x_1=0,b} = 0, \quad D_2^{(m)}(x_k) \Big|_{x_2=0,L} = 0,$$

то $E_1^{(m)}(x_k) = 0$ и $E_2^{(m)}(x_k) = 0$ на поверхности и в объеме деформируемого пьезокерамического стержня. Отсюда следует, что $D_1^{(m)}(x_k) = D_2^{(m)}(x_k) = 0 \forall x_k \in V$, где V – объем призматического стержня.

Таким образом, электрическое состояние деформируемого пьезокерамического стержня определяется аксиальным компонентом $D_3^{(m)}(x_2)$ вектора электрической индукции, величина которого не зависит от значения координаты x_3 . По этой причине фундаментальное условие отсутствия свободных носителей электричества $div \vec{D}^{(m)}(x_k) \equiv \partial D_3^{(m)}(x_k) / \partial x_3 = 0$ выполняется автоматически. Подставляя в соотношение (18) выражения (14), получаем описание электрической поляризации пьезокерамического стержня для режима одноосного напряженного состояния:

$$D_3^{(m)}(x_2) = e_{31}^* \varepsilon_{22}^{(m)}(x_2) + \chi_{33}^\sigma E_3^{(m)}(x_2), \quad (19)$$

где $\chi_{33}^\sigma = \chi_{33}^\varepsilon + (e_{31}^2 c_{33}^E + e_{33}^2 c_{11}^E - 2e_{31} e_{33} c_{12}^E) / \Delta_0$ – диэлектрическая проницаемость для режима постоянства (равенства нулю) механических напряжений $\sigma_{11}^{(m)}(x_k)$ и $\sigma_{33}^{(m)}(x_k)$.

В областях № 1, № 3 и № 5, где отсутствует электродирование на поверхности $x_3 = \alpha$, электрическая индукция $D_3^{(n)}(x_2)$ ($n = 1, 3, 5$) равна нулю на поверхности $x_3 = \alpha$ и, как следствие, в любой точке объема n -й области. Приравнивая нулю левую часть выражения (19), приходим к выводу, что в этих областях $E_3^{(n)}(x_2) = -e_{31}^* \varepsilon_{22}^{(n)}(x_2) / \chi_{33}^E$. При этом обобщенный закон Гука для n -й области записывается в следующем виде:

$$\sigma_{22}^{(n)}(x_2) = Y^D \varepsilon_{22}^{(n)}(x_2), \quad (20)$$

где $Y^D = Y^E + (e_{31}^*)^2 / \chi_{33}^\sigma$ – модуль Юнга для режима постоянства (равенства нулю) электрической индукции в деформируемом пьезоэлектрике.

Для того, чтобы определить аксиальный компонент $E_3^{(k)}(x_2)$ ($k = 2, 4$) вектора напряженности электрического поля под электродами первичной и вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора, запишем $E_3^{(k)}(x_2) = -\partial \Phi^{(k)}(x_2, x_3) / \partial x_3$, где $\Phi^{(k)}(x_2, x_3)$ – скалярный потенциал электрического поля в k -й области деформируемого пьезокерамического стержня. Подставляя это определение в соотношение (19) и интегрируя полученный результат по переменной x_3 в пределах от нуля до α , приходим к выводу, что

$$D_3^{(k)}(x_2) = e_{31}^* \varepsilon_{22}^{(k)}(x_2) - \chi_{33}^\sigma \frac{U^{(k)}}{\alpha}, \quad (21)$$

где $U^{(k)}$ – амплитудное значение электрического потенциала на поверхности $x_3 = \alpha$ в k -й области. Очевидно (рис. 1), что $U^{(2)} = U_0$, а $U^{(4)} = U_2$. Сравнивая два физически эквивалентных определения электрической индукции $D_3^{(k)}(x_2)$, т. е. приравнивая друг другу правые части выражений (19) и (21), получаем формулы для расчета амплитудного значения аксиального компонента вектора напряженности электрического поля в областях № 2 и № 4:

$$E_3^{(2)}(x_2) = -U_0 / \alpha, \quad E_3^{(4)}(x_2) = -U_2 / \alpha. \quad (22)$$

Таким образом, амплитудные значения механических напряжений в областях стержня под электродами первичной и вторичной

электрической цепи трансформатора рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(2)}(x_2) &= Y^E \varepsilon_{22}^{(2)}(x_2) + e_{31}^* \frac{U_0}{\alpha}, \\ \sigma_{22}^{(4)}(x_2) &= Y^E \varepsilon_{22}^{(4)}(x_2) + e_{31}^* \frac{U_2}{\alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Деформации сжатия-растяжения вдоль оси Ox_2 , т. е. величины $\varepsilon_{22}^{(k)}(x_2)$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$), определяются через амплитудное значение продольного компонента $u_2^{(k)}(x_2)$ вектора смещения материальных частиц k -го участка пьезокерамического стержня. При этом $\varepsilon_{22}^{(k)}(x_2) = \partial u_2^{(k)}(x_2) / \partial x_2$. Упругие смещения $u_2^{(k)}(x_2)$ из положения равновесия материальных частиц стержня удовлетворяют уравнению установившихся гармонических колебаний

$$\frac{\partial \sigma_{22}^{(k)}(x_2)}{\partial x_2} + \rho_0 \omega^2 u_2^{(k)}(x_2) = 0, \quad (24)$$

где ρ_0 – плотность пьезокерамики.

Подставляя определение механических напряжений $\sigma_{22}^{(k)}(x_2)$ на различных участках пьезокерамического стержня в уравнение (24), записываем его общее решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_2^{(1)}(x_2) &= A_1 \sin \gamma x_2 + B \cos \gamma x_2, \\ u_2^{(2)}(x_2) &= A_2 \sin \lambda x_2 + A_3 \cos \lambda x_2, \\ u_2^{(3)}(x_2) &= A_4 \sin \gamma x_2 + A_5 \cos \gamma x_2, \\ u_2^{(4)}(x_2) &= A_6 \sin \lambda x_2 + A_7 \cos \lambda x_2, \\ u_2^{(5)}(x_2) &= A_8 \sin \gamma x_2 + A_9 \cos \gamma x_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где A_1, \dots, A_9 и B – подлежащие определению константы; $\gamma = \omega \sqrt{\rho_0 / Y^D}$, $\lambda = \omega \sqrt{\rho_0 / Y^E}$ – волновые числа продольных колебаний материальных частиц пьезокерамики на участках без электродного покрытия поверхности $x_3 = \alpha$ и на электродированных участках стержня соответственно.

При любом способе закрепления пьезокерамического стержня на условных границах, выделенных в процессе расчетов областей, должны выполняться условия динамического и кинематического сопряжения решений (25). Эти условия записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{(1)}(\ell_1) &= \sigma_{22}^{(2)}(\ell_1), \quad \sigma_{22}^{(2)}(\ell_2) = \sigma_{22}^{(3)}(\ell_2), \\ \sigma_{22}^{(3)}(\ell_3) &= \sigma_{22}^{(4)}(\ell_3), \quad \sigma_{22}^{(4)}(\ell_4) = \sigma_{22}^{(5)}(\ell_4), \\ u_2^{(1)}(\ell_1) &= u_2^{(2)}(\ell_1), \quad u_2^{(2)}(\ell_2) = u_2^{(3)}(\ell_2), \\ u_2^{(3)}(\ell_3) &= u_2^{(4)}(\ell_3), \quad u_2^{(4)}(\ell_4) = u_2^{(5)}(\ell_4), \end{aligned} \quad (26)$$

Условия на границах $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ определяются способом закрепления торцов стержня. Предположим, что торцы стержня свободны от контактов с другими материальными объектами. Из этого следует, что на поверхностях $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ должны выполняться, как этого требует третий закон Ньютона, следующие условия:

$$\sigma_{22}^{(1)}(0) = 0, \quad \sigma_{22}^{(5)}(L) = 0. \quad (28)$$

Несложно подсчитать, что общее число условий (26)–(28) в точности соответствует числу искомых констант.

Для завершения построения математической модели стержневого трансформатора необходимо в явном виде определить константы A_1, \dots, A_9 и B . Из первого граничного условия (28) с очевидностью следует, что константа $B = 0$. Оставшиеся девять констант A_1, \dots, A_9 определяются из восьми условий (26), (27) сопряжения решений (25) уравнения (24) и второго граничного условия (28). Подставляя в эти условия определения напряжений $\sigma_{22}^{(k)}(x_2)$ и продольных смещений $u_2^{(k)}(x_2)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$m_{ij}A_j = P_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, 9, \quad (29)$$

где m_{ij} – частотно зависимые коэффициенты, числовые значения которых определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{11} &= -Y^D \gamma \sin \gamma \ell_1; \quad m_{12} = -Y^E \lambda \cos \lambda \ell_1; \\ m_{13} &= Y^E \lambda \sin \lambda \ell_1; \quad (m_{14} \div m_{19}) = 0; \quad m_{21} = 0; \\ m_{22} &= Y^E \lambda \cos \lambda \ell_2; \quad m_{23} = -Y^E \lambda \sin \lambda \ell_2; \\ m_{24} &= -Y^D \gamma \cos \gamma \ell_2; \quad m_{25} = Y^D \gamma \sin \gamma \ell_2; \\ (m_{26} \div m_{29}) &= 0; \quad (m_{31} \div m_{33}) = 0; \\ m_{34} &= Y^D \gamma \cos \gamma \ell_3; \quad m_{35} = -Y^D \gamma \sin \gamma \ell_3; \\ m_{36} &= -Y^E \lambda \cos \lambda \ell_3; \quad m_{37} = Y^E \lambda \sin \lambda \ell_3; \\ (m_{38} \div m_{39}) &= 0; \quad (m_{41} \div m_{45}) = 0; \\ m_{46} &= Y^E \lambda \cos \lambda \ell_4; \quad m_{47} = -Y^E \lambda \sin \lambda \ell_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{48} &= -Y^D \gamma \cos \gamma \ell_4; \quad m_{49} = Y^D \gamma \sin \gamma \ell_4; \\ m_{51} &= \cos \gamma \ell_1; \quad m_{52} = -\sin \lambda \ell_1; \quad m_{53} = -\cos \lambda \ell_1; \\ (m_{54} \div m_{59}) &= 0; \quad m_{61} = 0; \quad m_{62} = \sin \lambda \ell_2; \\ m_{63} &= \cos \lambda \ell_2; \quad m_{64} = \sin \gamma \ell_2; \quad m_{65} = -\cos \gamma \ell_2; \\ (m_{66} \div m_{69}) &= 0; \quad (m_{71} \div m_{73}) = 0; \quad m_{74} = \sin \gamma \ell_3; \\ m_{75} &= \cos \gamma \ell_3; \quad m_{76} = -\sin \lambda \ell_3; \quad m_{77} = -\cos \lambda \ell_3; \\ (m_{78} \div m_{79}) &= 0; \quad (m_{81} \div m_{85}) = 0; \quad m_{86} = \sin \lambda \ell_4; \\ m_{87} &= \cos \lambda \ell_4; \quad m_{88} = -\sin \gamma \ell_4; \quad m_{89} = -\cos \gamma \ell_4; \\ (m_{91} \div m_{97}) &= 0; \quad m_{98} = Y^D \gamma \cos \gamma L; \\ m_{99} &= -Y^D \gamma \sin \gamma L; \quad P_1 = e_{31}^* U_0 / \alpha; \quad P_2 = -e_{31}^* U_0 / \alpha; \\ P_3 &= e_{31}^* U_2 / \alpha; \quad P_4 = -e_{31}^* U_2 / \alpha; \quad (P_5 \div P_9) = 0. \end{aligned}$$

Из конструкции системы уравнений (29) с очевидностью следует, что напряженно-деформированное состояние стержня на всех без исключения его участках зависит одновременно от амплитудных значений потенциалов U_0 и U_2 , т. е. от потенциалов на электродах первичной и вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. Последнее означает, что потенциалы U_0 и U_2 связаны между собой линейной зависимостью. Эта зависимость является формальным (математическим) описанием акустической (механической) связи, которая существует в сплошном пьезокерамическом стержне между волновыми полями (материальными частицами) на его различных участках.

Для того, чтобы определить коэффициент связи между амплитудными значениями потенциалов U_0 и U_2 , построим выражение для расчета потенциала U_2 .

В соответствии с расчетной схемой, которая показана на рис. 1, необходимо записать, что

$$U_2 = Z_2 I_2, \quad (30)$$

где I_2 – амплитудное значение тока в проводнике вторичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора. Ранее было показано [7], что $I_2 = -i\omega Q_2$, где Q_2 – амплитудное значение электрического заряда на электроде вторичной электрической цепи. Очевидно, что

$$Q_2 = b \int_{\ell_3}^{\ell_4} D_3^{(4)}(x_2, \alpha) dx_2. \quad (31)$$

Подставляя в определение (31) расчетную формулу (21), получаем следующий результат:

$$Q_2 = b \left\{ e_{31}^* \left[u_2^{(4)}(\ell_4) - u_2^{(4)}(\ell_3) \right] - (\ell_4 - \ell_3) \chi_{33}^\sigma \frac{U_2}{\alpha} \right\} = \\ = b e_{31}^* \left[A_6 (\sin \lambda \ell_4 - \sin \lambda \ell_3) + A_7 (\cos \lambda \ell_4 - \cos \lambda \ell_3) \right] - \\ - C_4^\sigma U_2, \quad (32)$$

где $C_4^\sigma = b(\ell_4 - \ell_3) \chi_{33}^\sigma / \alpha$ – динамическая электрическая емкость участка пьезокерамического стержня под электродом вторичной электрической цепи.

Константы A_6 и A_7 определяются из системы уравнений (29) следующим образом:

$$A_6 = - \frac{e_{31}^* U_0}{\alpha} \xi_1 - \frac{e_{31}^* U_2}{\alpha} \xi_2, \\ A_7 = \frac{e_{31}^* U_0}{\alpha} \xi_3 + \frac{e_{31}^* U_2}{\alpha} \xi_4, \quad (33)$$

где $\xi_1 = (\Delta_{61} + \Delta_{62}) / \Delta_0$; $\xi_2 = (\Delta_{63} + \Delta_{64}) / \Delta_0$; $\xi_3 = (\Delta_{71} + \Delta_{72}) / \Delta_0$; $\xi_4 = (\Delta_{73} + \Delta_{74}) / \Delta_0$; Δ_{ij} – алгебраические дополнения – определители матриц размером 8×8 , которые получаются в результате вычеркивания i -го столбца и j -й строки из матрицы размером 9×9 , составленной из коэффициентов при константах A_j в системе уравнений (29); Δ_0 – определитель матрицы 9×9 из коэффициентов при константах A_j , т. е. главный определитель системы уравнений (29).

Подставляя соотношения (33) в определение (32) амплитудного значения электрического заряда Q_2 , можно записать следующее

$$Q_2 = C_4^\sigma U_2 \Psi_2(\omega) + C_4^\sigma U_0 \Psi_0(\omega),$$

где

$$\Psi_2(\omega) = \frac{(e_{31}^*)^2}{(\ell_4 - \ell_3) \chi_{33}^\sigma} \left[\xi_4 (\cos \lambda \ell_4 - \cos \lambda \ell_3) - \right. \\ \left. - \xi_3 (\sin \lambda \ell_4 - \sin \lambda \ell_3) \right] - 1; \\ \Psi_0(\omega) = \frac{(e_{31}^*)^2}{(\ell_4 - \ell_3) \chi_{33}^\sigma} \left[\xi_2 (\cos \lambda \ell_4 - \cos \lambda \ell_3) - \right. \\ \left. - \xi_1 (\sin \lambda \ell_4 - \sin \lambda \ell_3) \right].$$

Так как

$I_2 = -i\omega C_4^\sigma Z_2 U_2 \Psi_2(\omega) - i\omega C_4^\sigma Z_2 U_0 \Psi_0(\omega)$, то после подстановки амплитудного значения

тока I_2 в определение (30) получаем следующее равенство:

$$U_2 \left[1 + i\omega C_4^\sigma Z_2 \Psi_2(\omega) \right] = -i\omega C_4^\sigma Z_2 U_0 \Psi_0(\omega),$$

откуда следует, что

$$U_2 = -\Xi_0(\omega) U_0, \quad (34)$$

где $\Xi_0(\omega)$ – коэффициент обратной акустической связи, числовые значения которого рассчитываются по формуле

$$\Xi_0(\omega) = \frac{i\omega C_4^\sigma Z_2 \Psi_0(\omega)}{1 + i\omega C_4^\sigma Z_2 \Psi_2(\omega)}. \quad (35)$$

Очевидно (см. рис. 1), что амплитудное значение потенциала U_0 определяется следующим образом:

$$U_0 = \frac{U_1 Z_{31}^{(1)}(\omega)}{Z_1 + Z_{31}^{(1)}(\omega)}, \quad (36)$$

где $Z_{31}^{(1)}(\omega)$ – электрический импеданс участка пьезокерамического стержня под электродом первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Определим электрический импеданс $Z_{31}^{(1)}(\omega)$. Эта операция фактически завершает построение математической модели стержневого пьезоэлектрического трансформатора.

Из общеизвестного закона Ома для участка электрической цепи следует, что

$$Z_{31}^{(1)}(\omega) = \frac{U_0}{I_1}, \quad (37)$$

где I_1 – амплитудное значение электрического тока в проводнике первичной электрической цепи. Так как $I_1 = -i\omega Q_1$, а электрический заряд Q_1 определяется через электрическую индукцию $D_3^{(2)}(x_2, \alpha)$, то

$$I_1 = -i\omega b e_{31}^* \left[u_2^{(2)}(\ell_2) - u_2^{(2)}(\ell_1) \right] + i\omega C_2^\sigma U_0, \quad (38)$$

где $C_2^\sigma = b(\ell_2 - \ell_1) \chi_{33}^\sigma / \alpha$ – динамическая электрическая емкость участка пьезокерамического стержня под электродом первичной электрической цепи пьезоэлектрического трансформатора.

Коэффициенты A_2 и A_3 , определяющие продольные смещения материальных частиц стержня в сечениях $x_2 = \ell_1$ и $x_2 = \ell_2$, рассчитываются по следующим формулам:

$$A_2 = - \frac{e_{31}^* U_0}{\alpha} \xi_1 - \frac{e_{31}^* U_2}{\alpha} \xi_2,$$

$$A_3 = \frac{e_{31}^* U_0}{\alpha} \zeta_3 + \frac{e_{31}^* U_2}{\alpha} \zeta_4, \quad (39)$$

где $\zeta_1 = (\Delta_{21} + \Delta_{22})/\Delta_0$; $\zeta_2 = (\Delta_{23} + \Delta_{24})/\Delta_0$;
 $\zeta_3 = (\Delta_{31} + \Delta_{32})/\Delta_0$; $\zeta_4 = (\Delta_{33} + \Delta_{34})/\Delta_0$.

Подставляя определения (39) констант A_2 и A_3 в формулу для расчета смещения $u_2^{(2)}(x_2)$ материальных частиц стержня, а полученные результаты – в соотношение (38), получаем следующий результат:

$$I_1 = -i\omega C_2^\sigma U_0 \Psi_1(\omega), \quad (40)$$

где

$$\Psi_1(\omega) = \frac{(e_{31}^*)^2}{(\ell_2 - \ell_1)\chi_{33}^\sigma} \left\{ -[\zeta_1 - \Xi_0(\omega)\zeta_2](\sin\lambda\ell_2 - \sin\lambda\ell_1) + \right. \\ \left. + [\zeta_3 - \Xi_0(\omega)\zeta_4](\cos\lambda\ell_2 - \cos\lambda\ell_1) \right\} - 1.$$

Принимая во внимание определение (40) амплитудного значения тока в проводнике первичной электрической цепи, из соотношения (37) находим электрический импеданс

$$Z_{31}^{(1)}(\omega) = \frac{1}{-i\omega C_2^\sigma \Psi_1(\omega)},$$

после чего из соотношения (36) получаем расчетную формулу для амплитудного значения потенциала U_0

$$U_0 = \frac{U_1}{1 - i\omega C_2^\sigma Z_1 \Psi_1(\omega)}. \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в соотношение (34), находим расчетную формулу для потенциала U_2 , после чего можно записать выражение (1) для расчета коэффициента трансформации $K(\omega, \Pi)$ в следующем виде:

$$K(\omega, \Pi) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{\Xi_0(\omega)}{1 - i\omega C_2^\sigma Z_1 \Psi_1(\omega)}. \quad (42)$$

Аналитическая конструкция (42) является математической моделью стержневого пьезоэлектрического трансформатора, принцип действия которого предполагает использование продольных колебаний в призматическом стержне, расчетная схема которого показана на рис. 1.

Выводы. Основной результат данной статьи можно зафиксировать следующим образом: получена математическая модель стержневого пьезоэлектрического трансформатора, принцип действия которого предполагает использование продольных колебаний в призматическом стержне.

Список литературы

1. Джагунов Р. Г., Ерофеев А. А. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления. Санкт-Петербург: Политехника, 1994. 608 с.
2. Лавриненко В. В. Пьезоэлектрические трансформаторы. Москва: Энергия, 1975. 112 с.
3. Зубцов В. И. Математическая модель преобразователя статических механических напряжений внутри деформируемых материалов. *Инженерная физика*. 2004. № 4. С. 31–36.
4. Хуторненко С. В., Васильчук Д. П. Математическая модель пьезоэлектрического резонатора при наличии градиентного поля в плоскости кристаллического элемента. *Наукові праці ДонНТУ. Серія: Гірничо-електромеханічна*. 2011. Вип. 21 (189). С. 168–172.
5. Шульга М. О., Карлаш В. Л. Эффективність електромеханічного перетворення енергії при резонансних коливаннях елементів конструкцій із п'єзокераміки. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*. 2006. № 3. С. 225–237.
6. Карлаш В. Л. Вынужденные электромеханические колебания прямоугольных пьезокерамических стержней с разделенными электродами. *Прикладная механика*. 2013. Т. 49. № 3. С. 125–134.
7. Петрищев О. Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. 300 с.
8. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 280 с.

References

1. Dzhagupov, R. G. Erofeev, A. A. (1994) Piezoelectronic devices of computing, control and monitoring systems. St. Petersburg: Politekhnik, 608 p. [in Russian].
2. Lavrinenko, V. V. (1975) Piezoelectric transformers. Moscow: Energiya, 112 p. [in Russian].
3. Zubczov, V. I. (2004) Mathematical model of static mechanical stresses converter within deformable material. *Inzhenernaya fizika*, No. 4, pp. 31–36 [in Russian].

4. Khutornenko, S. V., Vojejkov, A. N., Vasylichuk, D. P. (2011) Mathematic model of piezoelectrical resonator at the presence of gradient field in crystalline element platitude. *Naukovi pratsi DonNTU. Seriya: Hirnycho-elektromekhanichna*, No. 21 (189), pp. 168–172 [in Russian].
5. Shul'ga, M. O., Karlash, V. L. (2006) An efficiency of electromechanical energy transformation at resonant vibrations of piezoceramics constructional elements. *Fizyko-matematychni modelyuvannya ta informacini tekhnologii*, No. 3, pp. 225–237 [in Ukrainian].
6. Karlash, V. L. (2013) Forced oscillations of electromechanical rectangular piezoceramic rods with divided electrodes. *Prikladnaya mekhanika*, Vol. 49, No 3, pp. 125–134 [in Russian].
7. Petrishchev, O. N. (2012) Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Part 1. Harmonic vibrations of piezoceramic elements in vacuum and a method of resonance – antiresonance. Kiev: Avers, 300 p. [in Russian].
8. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989) Mechanics of related fields in structural elements. Vol. 5. Electroelasticity. Kiev: Naukova dumka, 280 p. [in Russian].

O. N. Petrishchev¹, *Dr.Sc. (Eng.), professor*,
C. V. Bazilo², *Ph.D. (Eng.), associate professor*
¹Kyiv Scientific Research Institute of Hydrodevices
²Cherkasy State Technological University
 Shevchenko Blvd, 460, Cherkassy, 18006, Ukraine

MATHEMATICAL MODELING OF ROD TYPE PIEZOELECTRIC TRANSFORMER

The relevance of the use of various functional elements of piezoelectronics in power and informational systems is explained, first of all, by their high reliability, as well as small dimensions and weight, which greatly facilitates the solution of the problem of miniaturization of such systems.

The purpose of this article is to build a mathematical model of rod type piezoelectric transformer.

Currently, there are no reliable and valid methods of constructing of mathematical models of piezoelectric transformers, which could be used as a theoretical basis for characteristics and parameters calculating of this class of functional elements of modern piezoelectronics.

The main result of this article can be fixed as follows: mathematical model of rod type piezoelectric transformer, the principle of operation of which involves the use of longitudinal vibrations in prismatic rod, is obtained.

Keywords: rod type piezoelectric element, physical processes, mathematical model.

О. М. Петрищев¹, *д.т.н., професор*,
К. В. Базіло², *к.т.н., доцент*

¹Державне підприємство «Київський державний науково-дослідний інститут гідроапаратури»

²Черкаський державний технологічний університет
 б-р Шевченка, 460, м. Черкаси, 18006, Україна

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОГО ТРАНСФОРМАТОРА СТРИЖНЕВОГО ТИПУ

Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в силових та інформаційних системах пояснюється, перш за все, їх високою надійністю, а також малими габаритами і вагою, що значною мірою полегшує вирішення проблеми мініатюризації таких систем.

Основною метою статті є побудова математичної моделі п'єзоелектричного трансформатора стрижневого типу.

Нині існує потреба у створенні цілісної методики побудови математичних моделей п'єзоелектричних трансформаторів, яка могла б використовуватися як теоретична основа розрахунку їх характеристик і параметрів.

Основний результат статті можна зафіксувати в такий спосіб: отримано математичну модель стрижневого п'єзоелектричного трансформатора, принцип дії якого передбачає використання поздовжніх коливань у призматичному стрижні. Показано основні особливості математичного моделювання п'єзоелектричних трансформаторів, розглянуто найпростішу конструкцію трансформатора у вигляді призматичного стрижня з прямокутним поперечним перерізом, виготовленого з поляризованої п'єзокераміки. Напружено-деформований стан стрижня на всіх без винятку його ділянках залежить одночасно від амплітудних значень потенціалів на електродах первинного і вторинного електричних кіл п'єзоелектричного трансформатора. Це означає, що потенціали пов'язані між собою лінійною залежністю. Ця залежність є формальним (математичним) описом акустичного (механічного) зв'язку, який існує в суцільному п'єзокерамічному стрижні між хвильовими полями (матеріальними частинками) на його різних ділянках.

Ключові слова: *п'єзоелектричний стрижневий елемент, фізичні процеси, математична модель.*